Trabajo Práctico N°1

Estadística – Segundo Cuatrimestre 2017

Genoud Villafañe, Andrés Gerard Milian Gannon, Alen Zylbersztejn, Matías Ezequiel

28 de agosto de 2017

1. Introducción

El objetivo de este trabajo es modelar el proceso de mezcla de naipes conocido como *riffle shuffle*, escribir un algoritmo que baraje un mazo, e implementarlo en **R** a través de **RStudio** . Con el programa desarrollado, se busca simular el proceso de mezcla y responder a una pregunta natural: ¿Cuántas veces se debe ejecutar el proceso para que el mazo quede bien mezclado?

2. Preliminares y Modelo

Para empezar con el presente trabajo práctico se necesita primero definir la noción de 'mazo bien mezclado'. Contamos con dos conceptos básicos sobre permutaciones: cadena creciente consecutiva y el orden máximo:

- **Cadena consecutiva creciente:** Dada una permutación σ de los números 1 a n, decimos que $(t, t+1, t+2, ..., q-1, q)$ con $1 \leq t < q \leq n$ forman una cadena consecutiva creciente si estos números conservan su orden en la permutación σ. Por ejemplo, en la permutación $\sigma = 124635$, (123) es una cadena consecutiva creciente pero (456) no lo es (porque en σ el 6 está antes del 5).

- **Orden máximo**: El orden máximo de una permutación σ a la longitud máxima entre todas las cadenas consecutivas crecientes de σ. Por ejemplo, el orden máximo de 15234 es 4 (por la cadena (1234)), el orden máaximo de 54321 es 1 (porque no hay cadenas de longitud 2), el orden máximo de 12345 es 5 (por la cadena (12345)). [1]

En este sentido, si interpretamos a un mazo de n naipes como un elemento de S_n, podremos pensar a las longitudes de las cadenas crecientes como parámetro para definir cuán mezclado está un mazo. De esta manera, si existe una cadena de longitud n, eso será porque las cartas de la baraja están dispuestas de manera creciente, de 1 a n. Un mazo "bien mezclado" no puede tener, luego, cadenas crecientes de gran longitud. Puede, sin embargo, resultar engañoso, pues si las longitudes de las cadenas tienen una media muy baja, el mazo también estará ordenado. Por ejemplo, si todas las cadenas tienen longitud 1, la baraja estará ordenada de manera decreciente.

Consideraremos, luego, que un mazo está "bien mezclado" si el orden máximo del mismo es bajo, pero no mínimo. Hablar de un "orden bajo" es tan vago como la idea de un mazo "bien mezclado". Queda claro que este criterio dependerá del tamaño n de la baraja, e intentaremos especificarlo con nuestras simulaciones.

[1] http://cms.dm.uba.ar/academico/materias/2docuat2017/estadistica_M/tp1-20172.pdf

Por otro lado, la forma de mezclar que vamos a considerar es la del *riffle shuffle*, que será modelada de la siguiente manera:

- Se divide el mazo en dos sub-mazos, de modo que si el mazo entero tiene n cartas, entonces la cantidad de cartas del primer sub-mazo (llamémosla k) tiene distribucion $Bi(n, \frac{1}{2})$[2]. El primer sub-mazo se compone de las k cartas que estaban inicialmente arriba (en su mismo orden) y el segundo son las $n-k$ cartas que estaban inicialmente abajo (en su mismo orden).
- Se eligen al azar k números enteros distintos entre 1 y n. En estas k posiciones elegidas se ubican las k cartas del primer sub-mazo (*sin alterar su orden*), y en las posiciones restantes se ubican las cartas del segundo sub-mazo (también *sin alterar su orden*).

Luego se observa que con esta forma de mezclar, obtenemos la siguiente proposición:

Prop. Si se comienza con un mazo de 52 cartas, ordenado de 1 a n, y realizamos un *riffle shuffle*, el orden máximo de la permutación resultante no puede ser menor a 26.

Dem. Observar que por la definición del *riffle shuffle*, tras la partición, obtenemos dos sub-mazos ordenados de k y $52-k$ cartas. Luego, $k \geq 26$ ó $52-k \geq 26$. Como esos submazos están ordenados de manera creciente consecutiva, su órden máximo es igual a la cantidad de cartas. Al unir las dos partes, no se altera el orden de cada submazo, por lo que el orden máximo del mazo mezclado es mayor o igual a $\max\{k, n-k\}$. □

De este razonamiento se desprende que si vuelvo a mezclar, voy a obtener dos nuevos submazos, tales que alguno de los dos tiene una cadena creciente consecutiva de longitud 13 o mayor. Luego del paso de mezcla, las cartas que componen dicha cadena mantiene su orden relativo, dando así una cota inferior para el orden máximo de mazo tras dos pasos de *riffle shuffle.*

3. Simulación y Resultados

Se implementó en **R** los dos algoritmos requeridos por la consigna del trabajo. El primero calcula el orden máximo de una permutación, y el segundo realiza una permutación de un conjunto de n elementos, de acuerdo al modelo adoptado para el proceso de *riffle shuffle.* En el *script* adjunto, se puede encontrar el código para dichos programas, junto con el correspondiente a las dos simulaciones que analizaremos a continuación, todo acompañado de los comentarios necesarios para amenizar la lectura.

Mediante simulaciones en **R**, obtuvimos aproximaciones para la esperanza y desviación estándar para el orden máximo de un mazo aleatorio, y para el orden máximo de un mazo inicialmente ordenado que ha sido sometido a i pasos de *riffle shuffle.* En la Figura **1** se compararon los resultados obtenidos, y se observó que el orden máximo disminuye cuando crece la cantidad de veces que es mezclado. A partir de $i = 6$, la esperanza del OM se estanca alrededor de 4,2, que es la esperanza del orden máximo de un mazo generado de manera aleatoria.

Por lo que con estos datos concluimos, que si a un mazo se lo mezcla, por lo menos, 6 veces se lo puede considerar bien mezclado.

3.1. Resultados numéricos obtenidos

- **Valor más esperado del orden máximo de una permutación elegida al azar suponiendo un mazo de 52 cartas:** 4,2

[2] Ídem. Notar que se utiliza una distribución binomial para darle más peso al hecho de separar el mazo aproximadamente en dos partes similares.

- **Desvío estándar del valor más esperado del orden máximo de una permutación elegida al azar suponiendo un mazo de 52 cartas:** 0,79

- **Valores obtenidos para un mazo ordenado en función de la cantidad de mezclas:**

Cantidad de mezclas	Valor más esperado (OM)	Desvío estándar (OM)
1	28.745	2.197
2	16.850	2.011
3	10.391	1.519
4	7.028	1.199
5	5.499	1.008
6	4,784	0.891
7	4.478	0.840
8	4.350	0.790
9	4.243	0.784
10	4.212	0.786
11	4.231	0.832
12	4.175	0.800
13	4.168	0.819
14	4.204	0.788
15	4.240	0.803
16	4.226	0.803
17	4.161	0.783
18	4.199	0.772
19	4.183	0.773
20	4.198	0.790

4. Conclusiones

En base a lo demostrado y a los resultados informados en el presente informe se concluye que:

- Se puede considerar que un mazo de 52 cartas está bien mezclado si se somete a 6 pasos de *riffle shuffle*.

- Si el mazo (uno de 52 cartas) está ordenado inicialmente, al mezclarlo una sola vez según *riffle shuffle*, se encontrarán por lo menos 26 cartas que mantienen el orden relativo entre ellas. Y si se lo mezcla dos veces, al menos 13 cartas lo mantendrán.

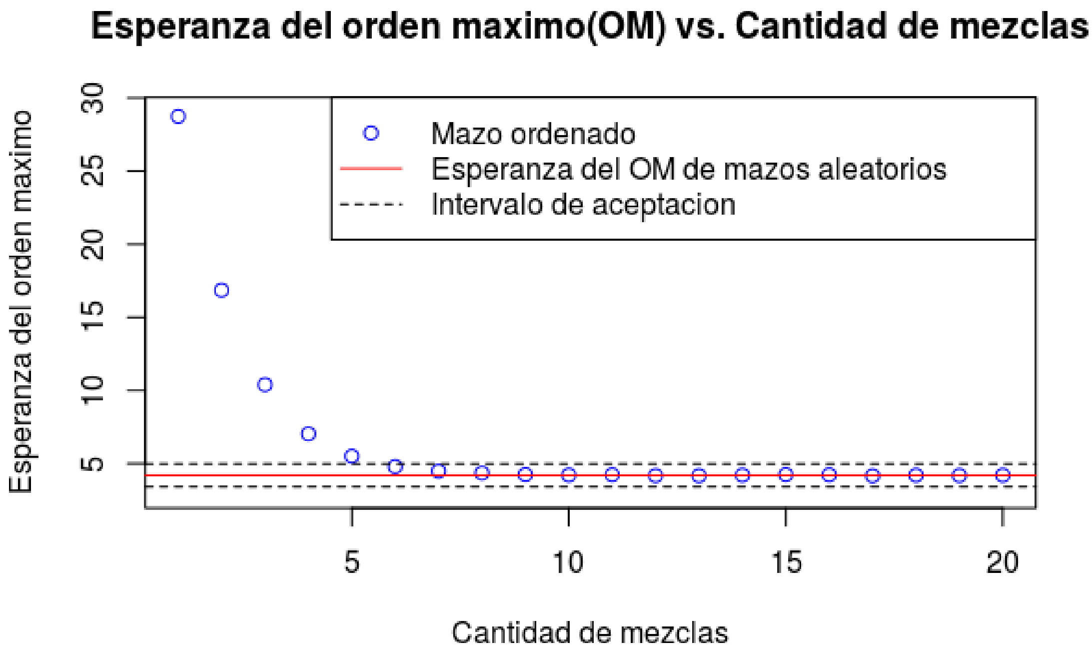

Figura 1: Gráfico comparativo entre el valor esperado del orden máximo de un mazo aleatorio y el valor esperado del orden máximo según la cantidad de veces que se mezcla un mazo ordenado. Las franjas intermitentes corresponden al valor esperado del OM de un mazo aleatorio $\pm$ el desvío estándar.

Apéndice

Para reproducir los resultados basta correr el *script* adjunto, que tiene seteada una semilla para reproducir la misma secuencia de números aleatorios. También se generará el gráfico correspondiente.

Es posible encontrar ciertos errores de ortografía, dependiendo de como esté configurada cada computadora- al cambiar la codificación de los caracteres, las letras con tildes podrían tener errores de conversión.